الجمهورية التونسية وزارة التربية	امتحان شهادة ختم التعليم الأساسي العام		
	دورة 2023		
	الاختبار: الرياضيات	الحصّة : ساعتان	ضارب الاختبار: 2

التّمرين الأوّل : (3 نقاط)

يلي كلّ سؤال ثلاث إجابات، إحداها فقط صحيحة.
أنقل، في كلّ مرّة، على ورقة تحريرك رقم السّؤال والإجابة الصّحيحة الموافقة له.

1. مجموعة حلول المعادلة $1 - 2|x| = -5$ في $\mathbb{R}$ هي :

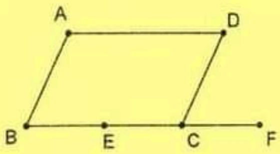
أ) $\emptyset$ ب) $\{-3,3\}$ ج) $\{3\}$

2. a و b رقمان. إذا كان العدد 9b2a يقبل القسمة على 4 وعلى 5 وعلى 9 في آن واحد فإنّ :

أ) $b=3$ ب) $b=7$ ج) $b=8$

3. في الرّسم التّالي ABCD متوازي الأضلاع حيث E منتصف $[BC]$ و C منتصف $[EF]$.
إحداثيّات النّقطة A في المعيّن (C, F, D) هي :

أ) $(-1,1)$ ب) $(2,1)$ ج) $(-2,1)$



التّمرين الثاني : (4 نقاط)

نعتبر العددين الحقيقيّين : $a = 8 - 4\sqrt{3} + 4\left(1 - \sqrt{3}\right)^2$ و $b = \frac{4+\sqrt{12}}{24}$

1. أ) بيّن أنّ $a = 12(2 - \sqrt{3})$ و $b = \frac{2+\sqrt{3}}{12}$

ب) بيّن أنّ a و b عددان مقلوبان.

ج) بيّن أنّ $3 < 2 + \sqrt{3} < 4$ واستنتج حصرا للعدد b

د) بيّن أنّ $a \in]3,4[$

2. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة $|2x - 7| < 1$

3. بيّن أنّ $|a - 3| + |a - 4| - (2a - 7)^2 > 0$

التّمرين الثالث: (6 نقاط)

1. نعتبر العبارة $F = -4x^2+5x$ حيث x عدد حقيقي.

أ) أحسب القيمة العددية للعبارة F في حالة $x = \frac{1}{2}$

ب) بيّن أنّ $F - \frac{3}{2} = -4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{4})$

ج) جد مجموعة الأعداد الحقيقيّة x حيث $F = \frac{3}{2}$

1/

- إصلاح مناظرة 2023 -

تمرين عدد 1:

1) ب) $\{-3;3\}$

2) ب) $b=7$

3) ج) $(-2;1)$

تمرين عدد 2:

1) أ)

$$a = 8-4\sqrt{3}+4(1-\sqrt{3})^2$$
$$= 8-4\sqrt{3}+4(1-2\sqrt{3}+3)$$
$$= 8-4\sqrt{3}+16-8\sqrt{3}$$
$$= 24-12\sqrt{3} = 12(2-\sqrt{3})$$

$$b = \frac{4+\sqrt{12}}{24} = \frac{2\times 2+2\sqrt{3}}{2\times 12}$$
$$= \frac{\cancel{2}(2+\sqrt{3})}{\cancel{2}\times 12} = \frac{2+\sqrt{3}}{12}$$

ب)

$$a\times b = 1\cancel{2}(2-\sqrt{3})\times\frac{(2+\sqrt{3})}{1\cancel{2}}$$
$$= 2^2-\sqrt{3}^2 = 4-3 = 1$$

إذن a و b مقلوبان.

ج)

$1<\sqrt{3}$
$1+2<2+\sqrt{3}$
$3<2+\sqrt{3}$

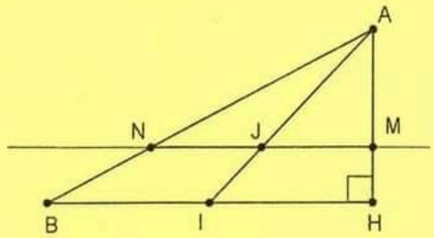
$\sqrt{3}<2$
$2+\sqrt{3}<2+2$
$2+\sqrt{3}<4$

إذن $3<2+\sqrt{3}<4$

$$3<2+\sqrt{3}<4$$

إذن $\frac{3}{12}<\frac{2+\sqrt{3}}{12}<\frac{4}{12}$

$$\boxed{\frac{1}{4}<b<\frac{1}{3}}$$



.2 (وحدة قيس الطّول هي الصنتمتر). في الرّسم المقابل لدينا :

- HAB مثلّث قائم في H حيث $AH = 1$ و $BH = 2$ و I منتصف [BH].
- M نقطة من [AH] مخالفة لـ A و H.
- المستقيم المار من M والموازي لـ (BH) يقطع [AI] في النّقطة J و[AB] في النّقطة N.

أ) بيّن أنّ $\frac{AJ}{AI} = \frac{NJ}{BI}$ وأنّ $\frac{AJ}{AI} = \frac{JM}{IH}$

ب) إستنتج أنّ J منتصف [MN].

ج) بيّن أنّ المثلّث MAJ قائم الزّاوية في M ومتقايس الضّلعين.

د) إستنتج أنّ $MN = 2MA$

.3 المستقيم المارّ من A والعمودي على (AB) يقطع (BH) في النّقطة C.

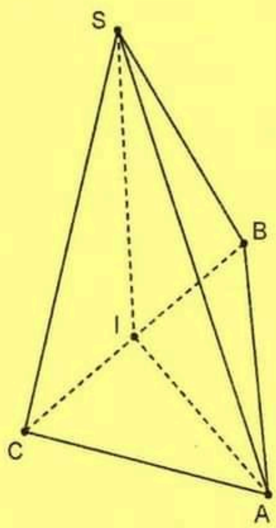
ليكن $HM = a$ حيث a عدد حقيقي ينتمي للمجال $]0,1[$ و S مساحة الرّباعي NHCM.

أ) بيّن أنّ $MN = 2(1-a)$ وأنّ $HC = \frac{1}{2}$

ب) بيّن أنّ $S = \frac{1}{4}(-4a^2 + 5a)$

ج) جد قيم العدد a حيث $S = \frac{3}{8}$

د) ما هي طبيعة الرّباعي NHCM في حالة $a = \frac{3}{4}$ ؟



التّمرين الرابع : (3 نقاط)

(وحدة قيس الطّول هي الصنتمتر). في الرّسم المقابل لدينا SABC هرم حيث :

- ABC مثلّث متقايس الأضلاع و I منتصف [BC].
- (SI) عمودي على المستوى (ABC).
- $AB = 2$ و $SI = \sqrt{11}$

.1 بيّن أنّ المستقيم (SI) عمودي على المستقيم (BI) واستنتج أنّ $SB = 2\sqrt{3}$

.2 بيّن أنّ المستقيم (AI) عمودي على المستوي (SBC) .

.3 لتكن النّقطة J منتصف [SB].

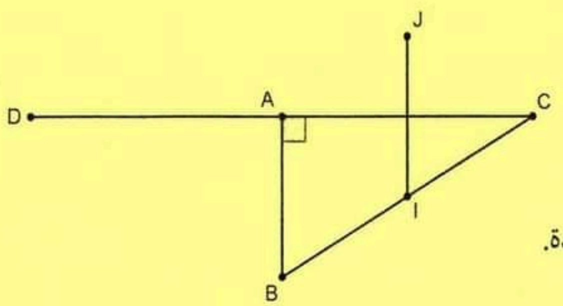
أ) بيّن أنّ المثلّث AIJ قائم في I ومتقايس الضّلعين.

ب) أحسب AJ.

التّمرين الخامس: (4 نقاط)

(وحدة قيس الطّول هي الصنتمتر). في الرّسم المقابل لدينا :

ABC مثلّث قائم الزّاوية في A، I منتصف [BC]، J مناظرة I بالنّسبة إلى (AC) و D مناظرة C بالنّسبة إلى A.



.1 أ) بيّن أنّ IA=IC

ب) بيّن أنّ الرّباعي AICJ معيّن.

.2 المستقيم (DI) يقطع [AB] في النّقطة G.

المستقيم (AJ) يقطع [DB] في النّقطة K.

أ) بيّن أنّ G مركز ثقل المثلّث DBC.

ب) إستنتج أنّ النّقاط C و G و K على استقامة واحدة.

.3 أ) بيّن أنّ النّقطة A منتصف [JK].

.4 ب) إستنتج أنّ G مركز ثقل المثلّث JKB.

.5 لتكن النّقطة O منتصف [BJ].

أ) بيّن أنّ النّقاط C و O و G على استقامة واحدة.

ب) بيّن أنّ : $GC = 4GO$

5/ ABC مثلث قائم في A و [AH] الإرتفاع الصادر من A
حسب العلاقة القياسية الثانية لدينا:

$$AH^2 = HC \times HB$$
$$1^2 = HC \times 2$$
$$HC = \frac{1}{2}$$

ب)

$$S = S_{NHCM} = S_{MHC} + S_{MHN}$$
$$= \frac{MH \times HC}{2} + \frac{MH \times MN}{2}$$
$$= \frac{a \times \frac{1}{2}}{2} + \frac{a \times \cancel{2} \times (1-a)}{\cancel{2}}$$
$$= \frac{a}{4} + a - a^2$$
$$= \frac{a}{4} + \frac{4a}{4} - \frac{4a^2}{4}$$
$$= \frac{5a - 4a^2}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(-4a^2 + 5a)$$

ج)

$$S = \frac{3}{8}$$
$$\frac{1}{\cancel{4}}(-4a^2 + 5a) = \frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{1}{2}$$
$$-4a^2 + 5a = \frac{3}{2}$$
$$F = \frac{3}{2}$$

حسب 1 ج $a = \frac{3}{4}$ أو $a = \frac{1}{2}$

د) في حالة $a = \frac{3}{4}$ إذن

$$MN = 2 \times (1 - a)$$
$$= 2 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

①

$b = \frac{1}{a}$ ولدينا a و b مقلوبان اذن $\frac{1}{4} < b < \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$$

$a \in]3;4[$ وبذلك $3 < a < 4$

②

$$|2x-7| < 1$$
$$-1 < 2x-7 < 1$$
$$6 < 2x < 8$$
$$3 < x < 4$$
$$S_{\mathbb{R}} =]3;4[$$

③

$$\underbrace{|a-3|}_{\in\mathbb{R}_+} + \underbrace{|a-4|}_{\in\mathbb{R}_-} - (2a-7)^2$$

محاولة 1

$$= \cancel{a} - 3 - \cancel{a} + 4 - (4a^2 - 28a + 49)$$
$$= 1 - 4a^2 + 28a - 49$$
$$= -4a^2 + 28a - 48$$
$$= -4(a^2 - 7a + 12)$$

بمكن الإستنتاج X

محاولة 2

$$|a-3| + |a-4| - (2a-7)^2$$
$$= 1 - (2a-7)^2$$

حسب ② اذا كان $3 < a < 4$ اذن

$$|2a-7| < 1$$
$$|2a-7|^2 < 1^2$$

اذن $1 - (2a-7)^2 \in \mathbb{R}_+^*$

4/

ب) حسب (أ) لدينا $\frac{JN}{IB} = \frac{JM}{IH}$

وبما أن I منتصف [BH] فإن $IH = IB$

وبذلك $JM = JN$ ولنا M و J و N على استقامة واحدة إذن J منتصف [MN].

ج) لدينا $\begin{cases} (MN) // (BH) \\ (AH) \perp (BH) \end{cases}$ إذن $(AH) \perp (MN)$

وبذلك المثلث MAJ قائم الزاوية في M.

حسب (أ) لنا $\frac{JM}{IH} = \frac{AM}{AH}$

وبما أن $AH = 1$ و $IH = \frac{BH}{2} = \frac{2}{2} = 1$ إذن

$IH = AH$ وبذلك $AM = JM$

إذن المثلث MAJ قائم ومتقايس الضلعين في M.

د)

$MN = MJ + JN = 2 \times JM$

(بما أن $MJ = JM$)

$MN = 2 \times JM = 2 \times MA$

(بما أن $JM = MA$)

3) أ) لدينا $MA = AH - MH$

$= 1 - a$

وحسب 2 د) $MN = 2MA = 2 \times (1 - a)$

إذن $MN = 2(1-a)$

3/

تمرين عدد 3 :

1) أ)

$F = -4x^2 + 5x$
$= -4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\times\frac{1}{2}$
$= -4\times\frac{1}{4} + \frac{5}{2} = -1 + \frac{5}{2}$
$= -\frac{2}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$

ب)

$-4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$
$= -4\left(x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right)$
$= -4x^2 + 3x + 2x - \frac{3}{2}$
$= \underbrace{-4x^2 + 5x} - \frac{3}{2} = F - \frac{3}{2}$

ج)

$F = \frac{3}{2}$ يعني $F - \frac{3}{2} = 0$

$-4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right) = 0$

اذن

$x = \frac{1}{2}$ أو $x = \frac{3}{4}$

2) أ) في المثلث AIH لدينا $M \in [AH]$ و $J \in [AI]$

حيث $(MJ) \parallel (IH)$ بتطبيق مبرهنة طالس لدينا :

$\frac{AJ}{AI} = \frac{AM}{AH} = \frac{JM}{IH}$ اذن $\boxed{\frac{AJ}{AI} = \frac{JM}{IH}}$

في المثلث AIB لدينا $J \in [AI]$ و $N \in [AB]$

حيث $(NJ) \parallel (BI)$ بتطبيق مبرهنة طالس لدينا :

$\frac{AJ}{AI} = \frac{AN}{AB} = \frac{JN}{IB}$ إذن $\boxed{\frac{AJ}{AI} = \frac{JN}{IB}}$

9/

(ب) G مركز ثقل المثلث JBK إذن

$OG = \frac{1}{3} OK$ يعني $OK = 3 \times OG$

G مركز ثقل المثلث DBC إذن

$$GC = \frac{2}{3} KC$$

وبما $OK = \frac{1}{2} KC$ يعني $KC = 2OK$

و بذلك:

$$GC = \frac{2}{3} \times KC = \frac{2}{3} \times 2 \times OK$$

$$= \frac{2}{\cancel{3}} \times 2 \times \cancel{3} \times OG = 4OG$$

إذن $\boxed{GC = 4GO}$

الأستاذ بسام الطوجاني

COLLEGE.MOURAJAA.COM

8/

② أ) بما أن [DI] موسط و [AB] موسط للمثلث DBC يتقاطعان في G إذن G مركز الثقل.

ب) بما أن G مركز ثقل المثلث DBC فإن الموسط الثالث الصادر من C يمر من G ويقطع [DB] في المنتصف.

(في المثلث DBC لدينا A منتصف [DC] و $(AK)//(BC)$ إذن K منتصف [DB]).

وبالتالي C و G و K على استقامة واحدة.

③ أ) حسب ما سبق في المثلث DBC لدينا $KA = \frac{BC}{2} = IC$ وبما أن $IC = AJ$ لأن AICJ معين إذن $KA = AJ$ ولنا A و K و J على استقامة واحدة إذن A منتصف [KJ]

ب) بما أن [AB] الموسط الصادر من A للمثلث JKB ولنا حسب (أ) $AG = \frac{1}{3} AB$ إذن G مركز ثقل المثلث JKB.

④ أ) بما أن $KJ = BC$ و $(KJ)//(BC)$ إذن الرباعي KJCB متوازي أضلاع ولنا O منتصف القطر [JB] إذن O منتصف القطر [KC] وبذلك O و K و C على استقامة واحدة وحسب ③ أ) C و K و G على استقامة واحدة إذن C و O و G على استقامة واحدة.

$(NM) \parallel (HC)$ ولنا $MN = HC = \frac{1}{2}$ وبذلك

إذن

$NHCM$ متوازي أضلاع

تمرين عدد 4 :

① $(SI) \perp (ABC)$ في I إذن (SI) عمودي

على كل مستقيمات المستوي المارة من I والمحتواة

في (ABC) ولنا $(BI) \subset (ABC)$ و $I \in (BI)$

إذن $(SI) \perp (BI)$

بتطبيق نظرية بيتاغور في المثلث SIB القائم

في I لدينا :

$$SB^2 = IS^2 + IB^2$$

$$= \sqrt{11}^2 + 1^2 = 12$$

$$SB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

② بما أن ABC متقايس الأضلاع و I منتصف $[BC]$

فإن $[AI]$ موسط وكذلك ارتفاع إذن

$(AI) \perp (BC)$

ولنا $(SI) \perp (ABC)$ إذن يمكن استنتاج أن

$(SI) \perp (IA)$

وبذلك

$$\begin{cases} (AI) \perp (BC) \subset (SBC) \\ (AI) \perp (SI) \subset (SBC) \\ (BC) \cap (SI) = \{I\} \end{cases}$$ إذن $(AI) \perp (SBC)$

7/

③ (أ) في المثلث القائم IBS لدينا J منتصف الوتر إذن $IJ = \frac{SB}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

IA ارتفاع المثلث ABC المتقايس الأضلاع إذن

$$IA = \frac{2\times\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

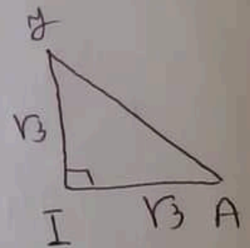
وبذلك $IJ = IA$ وبالتالي المثلث AIJ متقايس الضلعين في I.

لنا $(IA)\perp(SBC)$ في I و $(IJ)\subset(SBC)$

و $I\in(IJ)$ إذن $(IA)\perp(IJ)$

وبذلك المثلث AIJ متقايس الضلعين وقائم في I.

(ب)



إذن JA هو قطر مربع طوله √3 وبذلك.

$$JA = \sqrt{3}\times\sqrt{2} = \sqrt{6}$$

تمرين عدد 5 :

① (أ) بما أن I منتصف وتر المثلث ABC القائم في A

إذن $\boxed{IA = IC}$.

(ب) $\begin{cases} S_{(AC)}(I) = J \\ S_{(AC)}(A) = A \end{cases}$ إذن $\boxed{IA = JA}$ وكذلك $\begin{cases} S_{(AC)}(I) = J \\ S_{(AC)}(C) = C \end{cases}$ إذن $\boxed{IC = JC}$

إذن $IA = IC = AJ = JC$ وبذلك الرباعي AICJ معين